

HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZNOŚĆ

Stanisław Jemioło
Marcin Gajewski

Seria Monografie Zakładu
Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości i Plastyczności



**Seria wydawnicza
Monografie Zakładu
Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości
i Plastyczności**

Tom 4



**Wydział Inżynierii Lądowej
Politechniki Warszawskiej**

HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZOŚĆ

Stanisław Jemioło
Marcin Gajewski

Seria Monografie Zakładu
Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości i Plastyczności

Warszawa 2014

Publikacja jest IV tomem Serii Wydawniczej
„Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów,
Teorii Sprężystości i Plastyczności”

Opiniodawca

Dr hab. inż. Józef Pelc, prof. Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego

Projekt okładki

Danuta Czudek-Puchalska

© Copyright by Zakład Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności
Wydział Inżynierii Lądowej Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2014

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych, w tym nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w Internecie bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich

ISBN 978-83-7814-337-6

Druk i oprawa: Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej, tel. 22 234-55-93
Oficyna Wydawnicza PW, ul. Polna 50, 00-644 Warszawa. Wydanie I. Zamówienie nr 461/2014

Spis treści

I WSTĘP

1. Zakres tematyczny monografii	9
2. Uwagi bibliograficzne	10

II O TEORII SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNOŚCI MAŁYCH ODKSZTAŁCEŃ

1. Podstawowe założenia teorii sprężysto-plastyczności	15
2. Sprężystość	21
2.1. Ogólna struktura relacji konstytutywnych sprężystości	21
2.2. Izotropia	24
2.3. Uwagi o implementacji związków sprężystości w programie ABAQUS	25
3. Izotropowy związek Hooke'a	26
4. Warunek plastyczności Hubera	27
5. Idealna plastyczność	28
5.1. Relacje konstytutywne idealnej plastyczności	28
5.2. Uwaga o funkcjach jednorodnych	29
5.3. Dyssypacja i interpretacja parametru plastycznego płynięcia	30
5.4. Zasada maksimum dyssypacji	31
6. Sprężysto-plastyczność z warunkiem plastyczności Hubera	32
6.1. Stowarzyszone prawo płynięcia i funkcja dyssypacji	32
6.2. Wzmocnienie izotropowe i kinematyczne	32
6.3. Przyrostowe relacje konstytutywne	33
7. Algorytm numeryczny całkowania relacji konstytutywnych plastyczności	34
7.1. Algorytm	34
7.2. Podstawowe testy numeryczne	36
8. Zadania testowe MES	40
8.1. Jednoosiowy stan naprężenia	40
8.2. Ekspansja cylindra grubościennego	42
8.3. Rozciąganie płaskownika	45

III PODSTAWOWE RÓWNANIA MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGLYCH

1. Wstęp	47
2. Tensor deformacji, odkształcenia i naprężenia	48
2.1. Stan naprężenia i tensory deformacji	48
2.2. Tensory odkształcenia	52
2.3. Tensor gradientów pola prędkości oraz tensor spinu i jego interpretacja	53
3. Równania ruchu i równowagi	55
4. Wielkości i pochodne obiektywne	56
5. Współrzędne konwekcyjne i pochodna Lee	58
6. Uwagi o MES i zasadzie prac wirtualnych	59

6.1. Zasada prac wirtualnych.....	59
6.2. Uwagi o programie MES ABAQUS	60
7. Podstawowe prawa termodynamiki.....	61
7.1. I prawo termodynamiki	61
7.2. II prawo termodynamiki i nierówność Clasiusa-Duhema	62
7.3. Energia swobodna Hemholtza	63
 IV HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ	
1. Zależności podstawowe	65
2. Klasyczne modele izotropowych materiałów hipersprężystych.....	67
2.1. Ogólna postać relacji konstytutywnej	67
2.2. Model materiału Murnaghana i Saint-Venata Kirchhoffa	68
2.3. Styczny tensor sztywności	69
3. Alternatywne sformułowania izotropowych relacji konstytutywnych	71
3.1. Zastosowanie niezmienników podstawowych	71
3.2. Styczny tensor sztywności w opisie Eulera	73
4. Klasyfikacja izotropowych modeli hipersprężystości	73
4.1. Relacje konstytutywne z niezmiennikami deformacji izochorycznej i objętościowej	73
4.2. Klasyfikacja materiałów hipersprężystych.....	74
4.3. Relacje konstytutywne w postaci spektralnej	75
4.4. Podsumowanie	77
5. Najprostsze modele hipersprężystości materiałów izotropowych.....	79
5.1. Model materiału nieściśliwego Neo Hooke'a (NNH)	79
5.2. Model logarytmiczny Henckey'go (LN)	79
6. Uogólnienia modelu NH	83
6.1. Modele materiałów ściśliwych CNH.....	83
6.2. Modele materiałów mało ściśliwych NH (MCNH)	86
7. Modele o poliwy pukłej funkcji jednostkowej energii sprężystości.....	88
7.1. Definicja poliwy pukłości	88
7.2. Przykłady poliwy pukłych potencjałów sprężystości.....	88
 V HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ – IMPLEMENTACJA NUMERYCZNA	
1. Uwagi wstępne	91
2. Idea wyprowadzenia związków przyrostowych	92
3. Wyprowadzenie operatora czwartego rzędu w przypadku materiałów MCNH	94
4. Modele materiałów CNH.....	96
5. Modele materiałów MCNH.....	97
6. Podstawowe testy numeryczne	99
6.1. Uwagi wstępne	99
6.2. Test jednoosiowego odkształcenia	100
6.3. Test prostego ścinania	104
 VI HIPERSPRĘŻYSTOŚĆ – TESTY NUMERYCZNE	
1. Uwagi wstępne	111
2. Rozciąganie tarczy z otworem	111
3. Osiowe ściskanie rury	115
 VII TEORIE SPRĘŻYSTO-PLASTYCZNOŚCI DUŻYCH DEFORMACJI I HIPERSPRĘŻYSTO- PLASTYCZNOŚCI	
1. Uwagi wstępne	123
2. Idealna plastyczność	124

3. Hiposprężysto-plastyczność	125
4. Multiplikatywna dekompozycja gradientu deformacji	127
5. Relacje konstytutywne	131
6. Relacje konstytutywne hipersprężystoplastyczności z zastosowaniem funkcji dyssypacji	133

VIII IMPLEMENTACJA MODELU SIMO HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZNOŚCI

1. Sformułowanie modelu HSP	135
1.1. Założenia	137
1.2. Warunek plastyczności	137
1.3. Stowarzyszone prawo płynięcia	137
2. Algorytm całkowania relacji konstytutywnych	137
3. Operator czwartego rzędu w przypadku modelu HSP	140

IX TESTY RELACJI KONSTYTUTYWNYCH HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZNOŚCI

1. Wstęp	143
2. Podstawowe testy algorytmu całkowania modelu HSP	144
2.1. Test prostego ścinania	144
2.2. Test jednoosiowego odkształcenia	147
2.3. Deformacja realizująca obrót $\mathbf{F} = \mathbf{R}$	150
2.4. Deformacja jednoosiowego odkształcenia przy rozciąganiu i obrocie	151
3. Sprawdzenie poprawności implementacji modelu Simo w programie ABAQUS	153
3.1. Test prostego ścinania	156
3.2. Test jednoosiowego odkształcenia przy rozciąganiu	157
4. Porównanie modelu Simo z wybranymi modelami materiału hipersprężysto-plastycznego zaimplementowanymi w programie ABAQUS	157
4.1. Test prostego ścinania	157
4.2. Test jednoosiowego odkształcenia	159

X ZADANIA TESTOWE HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZNOŚCI

1. Ekspansja cylindra grubościennego	161
1.1. Rozwiązanie analityczne – materiał sztywno-plastyczny	161
1.2. Rozwiązanie numeryczne – materiał hipersprężystoplastyczny – porównanie z wynikami dostępnymi w literaturze	164
1.3. Rozwiązanie numeryczne – materiał hipersprężystoplastyczny – porównanie z wynikami teorii małych odkształceń	166
2. Rozciąganie pręta o przekroju kołowym	170
2.1. Uwagi wstępne	170
2.2. Dane do zadania oraz analiza wyników uzyskanych w literaturze	171
2.3. Dyskusja wyników MES rozciągania pręta z zastosowaniem modelu SSP	172
2.4. Zastosowanie modeli MNHP i MMRP	176
3. Lokalizacja odkształceń w rozciąganych płaskowniku	180

XI TESTY NUMARYCZNE HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZNOŚCI W ZADANIACH KONTAKTOWYCH

1. Uwagi o zagadnieniach kontaktowych	183
2. Ściskanie walca między sztywnymi płytami	184
3. Ściskanie rury między dwiema płytami	187

XII WYBRANE ZAGADNIENIA BRZEGOWE HIPERSPRĘŻYSTOPLASTYCZNOŚCI

1. Zagadnienia z niestabilnościami lokalnymi i globalnymi.....	193
2. Analiza ściskania rury o przekroju kołowym – wpływ warunków brzegowych	194
2.1. Przykład A	194
2.2. Przykład B	196
3. Analiza ściskania i rozciągania rury o przekroju eliptycznym.....	201
3.1. Przykład A – ściskanie rury o przekroju eliptycznym przy $h/R_m = 20$	201
3.2. Przykład B – ściskanie rury o przekroju eliptycznym przy $h/R_m = 10$	210
3.3. Przykład C – ściskanie rury o przekroju eliptycznym przy $h/R_m = 5$	213
3.4. Przykład D – rozciąganie rury o przekroju eliptycznym przy $h/R_m = 5$	216
4. Analiza ściskania i rozciągania rury o przekroju prostokątnym	218
5. Zadanie ściskania kątownika.....	222
6. Uwagi końcowe.....	227
 XIII PODSUMOWANIE	 229
 BIBLIOGRAFIA.....	 231

I WSTĘP

1. Zakres tematyczny monografii

W przypadku całej klasy zagadnień technicznych, takich jak gięcie na zimno i tłoczenie blach metalowych, zagadnień globalnego wyboczenia słupów albo lokalnego wyboczenia wiotkich elementów oraz ścianek elementów konstrukcji metalowych, opisu elementów wykonanych z polimerów i elastomerów, zakres możliwych deformacji może być znaczny. W trakcie obciążania rosną zarówno odkształcenia, jak i lokalnie obroty cząstek ciała. W wyniku odciążenia część sprężysta deformacji zanika. Pozostaje tylko ta część, którą interpretuje się jako plastyczną. Kiedy zakres odkształceń sprężystych i plastycznych jest porównywalny i znaczny, to zastosowanie klasycznej teorii małych odkształceń może być niewystarczające, a uzyskane wyniki niezadowalające. Wtedy formułuje się tzw. teorię plastyczności dużych deformacji, por. wybrane prace źródłowe Lee [173, 174], Hibbitta i in. [123], Kratochvila [166], Argyrisa i in. [19-21], Casey'a i Naghdiego [57-60], Nemat-Nassera [201, 202], Simo [248], Simo i Taylora [255]. Konieczność jej stosowania wynika czasem wyłącznie z kinematyki opisywanego zagadnienia, por. np. Crisfield [72, 73], Quoc [225], Jemioło i Gajewski [145, 146]. Dzieje się tak np. w przypadku zagadnienia tłoczenia, walcowania, gięcia na zimno blach metalowych, przeciągania, wykonywania zimnogiętych profili ze stali, aluminium i innych stopów metali, które są obecnie powszechnie stosowane (np. w budownictwie). Proces ten ze względu na występowanie lokalnie znacznych obrotów cząstek modelowanego ciała wymaga zastosowania teorii dużych deformacji, chociaż nie wskazuje na to wielkość odkształceń, zarówno w zakresie sprężystym, jak i plastycznym. W wymienionych przypadkach zagadnień brzegowych niedopuszczalne jest założenie o izotropii materiału, dlatego konieczne jest uwzględnienie anizotropii zarówno w zakresie sprężystym jak i plastycznym, np. Brünig [48, 49], Rojek i in. [235]. Zagadnienie to, szczególnie istotne w przemyśle motoryzacyjnym, jest obecnie szczegółowo analizowane i organizowane są specjalne konferencje poświęcone wyłącznie tej tematyce.

Celem niniejszej monografii jest zastosowanie i implementacja numeryczna w programie MES ABAQUS [1-5] wybranych modeli konstytutywnych teorii sprężysto-plastyczności dużych deformacji, głównie dla metali. Ograniczamy szczegółowe rozważania do tych sformułowań i modeli, w których występuje warunek plastyczności Hubera z 1904r. [130] oraz materiał sprężysto-plastyczny jest materiałem izotropowym w konfiguracji odniesienia. Rozdział II, który dotyczy teorii małych odkształceń, jest punktem wyjścia do przedstawienia teorii hipersprężystości w Rozdziale IV i jej implementacji numerycznej w programach MES (Rozdział V) oraz teorii sprężysto-plastyczności dowolnych deformacji w Rozdziale VII.

Przedyskutowana zostanie teoria plastyczności dowolnych deformacji, oparta o dekompozycję multiplikatywną gradientu deformacji, na tle teorii dużych deformacji z addytywną dekompozycją tensorów odkształceń (np. takiej, jak standardowo zaimplementowana w programie ABAQUS) i klasycznej teorii małych przemieszczeń. Obydwa sformułowania (w ramach teorii dużych deformacji) pozwalają na uwzględnienie dużych lokalnych obrotów cząstek materiału. Jak wspomniano wcześniej, pominięcie lokalnych obrotów cząstek ciała jest podstawową wadą tradycyjnej, powszechnie stosowanej teorii sprężysto-plastyczności małych odkształceń. Jeżeli rozpatrujemy kolejne konfiguracje odkształconego ciała, to przyrostowe nieliniowe związki fizyczne sprężysto-plastyczności małych odkształceń nie są obiektywne.

Szczegółowo przeanalizowane zostaną także podstawowe założenia teorii plastyczności dużych deformacji odnośnie do kinematyki ciała oraz relacji konstytutywnych sprężystości i plastyczności, patrz Rozdział III. Podstawą rozważań o kinematyce deformacji ciała sprężysto-plastycznego są oczywiście pojęcia i zależności mechaniki ośrodków ciągłych. Sprężyste właściwości materiału zostaną opisane w ramach teorii hipersprężystości (Rozdział IV), która jest obecnie dziedziną intensywnie rozwijaną, por. monografię Jemioło [140] oraz prace źródłowe tam cytowane (w odniesieniu do materiałów anizotropowych, por. np. pracę Jemioło i Telegi [156] i literaturę tam cytowaną). Przyrostowe, obiektywne związki hipersprężystości prezentowane są w Rozdziale V, co jest punktem wyjścia do implementacji rozważanych modeli w programie MES ABAQUS/Standard w ramach procedury użytkownika UMAT. Natomiast testy numeryczne i przykłady zagadnień brzegowych hipersprężystości zamieszczamy w Rozdziale VI. Po przedstawieniu teorii hipersprężysto-plastyczności w Rozdziale VII, w dalszej części monografii, w Rozdziale VIII podajemy sposób implementacji modelu Simo [249-251] w systemie ABAQUS/Standard w ramach procedury użytkownika UMAT. Rozdziały IX, X, XI i XII są poświęcone zagadnieniom brzegowym teorii sprężysto-plastyczności dużych deformacji i hipersprężysto-plastyczności. W Rozdziale IX są podstawowe testy numeryczne, które potwierdzają poprawność implementacji numerycznej modelu Simo w programie ABAQUS. Bardziej złożone przykłady są dyskutowane w Rozdziale X, XI i XII, gdzie analizowane są m.in. zagadnienia kontaktowe i wyboczenia rur. Rozdział XIII zawiera krótkie podsumowanie zagadnień poruszanych w monografii i propozycje dalszych badań.

2. Uwagi bibliograficzne

W związku z tym, że wśród badaczy nie ma zgody odnośnie do sformułowania teorii sprężysto-plastyczności w zakresie dowolnych deformacji, jej zastosowanie musi poprzedzić szczegółowa analiza i weryfikacja propozycji prezentowanych w literaturze od lat sześćdziesiątych ubiegłego wieku, patrz np. prace przeglądowe [201, 310]. Bibliografia tej monografii zawiera 323 pozycje. Są to m.in. podręczniki z teorii ośrodków ciągłych, hipersprężystości, teorii sprężysto-plastyczności, metody elementów skończonych, prace źródłowe i własne prace związane z hipersprężystością i plastycznością. Warto podkreślić, że w literaturze nie ma zbyt wielu prac, stanowiących porównanie i systematyczną analizę teorii małych przemieszczeń i dużych deformacji ciał sprężystych i plastycznych, w których wyjaśniono by wszystkie konsekwencje sformułowania zagadnienia brzegowego w każdej z tych teorii. Zazwyczaj badacze koncentrują się wyłącznie na relacjach konstytutywnych w oderwaniu od teorii, w której miałyby być one stosowane. Zwykle dokonuje się podziału na zagadnienia brzegowe fizycznie albo geometrycznie nieliniowe. Wydaje się jednak, że takie podejście nie jest wystarczające.

Klasycznym sformułowaniom związków fizycznych sprężysto-plastyczności poświęcone są między innymi monografie: Hilla 1950r. [161], Olszaka red. 1965r. [207], Perzyny 1966r. [217], Sawczuka 1982r. [241], 1989r. [242], Lubliner 1990r. [183], Khana i Huanga 1995r. [161] oraz wiele innych.

Opublikowana po drugiej wojnie światowej monografia Hilla [161] pt. „*The mathematical theory of plasticity*”, położyła podwaliny i stała się przyczynkiem do rozwijania nowoczesnej teorii sprężysto plastyczności. Polscy uczeni podjęli ten temat i już w 1965 roku pod redakcją Wacława Olszaka opublikowana została monografia pt. „*Teoria plastyczności*”, poświęcona w całości zagadnieniom teorii deformacyjnej plastyczności, teorii plastycznego płynięcia, teorii nośności granicznej, badaniom doświadczalnym oraz pewnym szczególnym zagadnieniom brzegowym teorii plastyczności (np. płaskie plastyczne płynięcie i sprężysto-plastyczne skręcanie prętów przyrzutowych). Wśród współautorów tej monografii można wymienić m.in. Sawczuka, Perzynę, Mroza, Rychlewskiego, Szczepińskiego, Urbanowskiego, Marciniaka i Życzkowskiego, a w spisie literatury załączanym po każdym rozdziale znaleźć można wiele prac źródłowych takich autorów, jak Bridgman, Hencky, Lode, Hill, Prager, Drucker, Niepostyn, Sokołowski, Mises, Nádai, Iliuszyn i wielu innych. Na szczególną uwagę zasługuje Rozdział XII tej monografii zatytułowany „Współczesne kierunki rozwojowe teorii plastyczności”, gdzie w formie podpunktów wskazano m.in. następujące kierunki badań: „Odształcenia skończone”, „Anizotropia. Niejednorodność”, „Hipsprężystość”, „Lepko-plastyczność”, „Mechanika gruntów”, „Zagadnienia dynamiczne”. Mimo upływu wielu lat i niewątpliwego rozwoju omawianej dziedziny, dzisiaj można by nakreślić analogiczne kierunki badań nad sformułowaniem i zastosowaniami teorii sprężysto-plastyczności, por. [6, 26, 61, 69, 11, 112, 151, 160, 167, 217, 313, 316-318].

Kolejna istotna monografia w języku polskim autorstwa Sawczuka [241] opublikowana została w 1982 roku. Zawiera ona usystematyzowane wyniki badań teoretycznych zapisane przy wykorzystaniu notacji absolutnej i teorii reprezentacji funkcji tensorowych w kontekście teorii idealnej plastyczności, teorii Levy’ego-Misesa, Prandtla-Reussa, stowarzyszonego prawa płynięcia, wzmocnień odształceniowych i powierzchni granicznych. Zastosowania teorii plastyczności i teorii nośności granicznej pokazano na przykładzie układów prętowych, teorii płyt plastycznych, teorii linii załomów oraz powłok walcowych.

W tym samym roku, co monografia Sawczuka, wydana została książka W.F. Chena [61] dotycząca plastyczności w betonowych konstrukcjach zbrojonych. W omawianej monografii zawężono modelowanie konstytutywne tylko do betonu zbrojonego wkładkami stalowymi, jednak wobec znacznej liczby zjawisk towarzyszących deformacji elementów konstrukcji betonowych (np. dyatacja, różnica między rozciąganiem a ściskaniem w teście jednoosiowym, itp.) można znaleźć tu wiele koncepcji rozwijanych później w przypadku innych materiałów. Obok systematycznie zaprezentowanej klasyfikacji modeli materiałów sprężysto-plastycznych do opisu właściwości betonu w monografii zawarte są podstawy sformułowania metody elementów skończonych w zastosowaniu do omawianych modeli (rozdział 9) oraz podstawowe badania doświadczalne stosowane do wyznaczenia parametrów materiałowych (rozdział 1, pkt.2).

Wiele pozycji literatury dotyczących zagadnień teorii sprężysto-plastyczności zostało wydane w ostatnim dziesięcioleciu XX wieku - Lubliner [183], Khan i Huang [161], Simo i Hughes [252] i na początku XXI wieku Gambin i Kowalczyk 2003r. [98].

Podręcznik Lubliner 1990r. stanowi łagodne przejście od teorii małych przemieszczeń do teorii dużych deformacji. Lubliner wykorzystał m.in. wcześniejsze własne prace [180-182] i zaprezentował teorię plastyczności małych przemieszczeń w ramach termodynamiki przez koncepcję zmiennych wewnętrznych (rozdział 1, pkt.1.5), por. także Jemioło i Giżejowski [148, 149]. Monografia zawiera ponadto fizyczne interpretacje procesów plastycznego płynięcia w przypadku materiałów o budowie krystalicznej, skał i gruntów oraz rozdział

poświęcony modelowaniu właściwości plastycznych w zagadnieniach statycznych i dynamicznych wraz z twierdzeniami ekstremalnymi i dowodami jednoznaczności rozwiązań. W ostatnim rozdziale zaprezentowano teorię plastyczności dużych deformacji w ramach termodynamiki procesów nieodwracalnych sformułowaną na bazie dekompozycji multiplikatywnej.

W monografii A. S. Khana i S. Huanga [161] prezentacja teorii plastyczności od początku prowadzona jest w ramach teorii dowolnych deformacji. Teoria małych przemieszczeń pokazywana jest wyłącznie jako szczególny przypadek szerzej sformułowanej teorii dużych deformacji. Znaleźć w niej można rozdział poświęcony plastyczności pojedynczych kryształów, z której to historycznie wywodzi się koncepcja multiplikatywnej dekompozycji gradientu deformacji (por. także Lee [172], Boukadia i Sidorf [41]) oraz rozdział, w którym wskazano nowe trendy rozwojowe w teorii plastyczności (a wśród nich model wielopowierzchniowy Mroza [193, 194], modele dwupowierzchniowe Popova i Dafaliasa, itp.). W podręczniku tym brakuje jednak uwag na temat implementacji numerycznej (przydatności z punktu widzenia implementacji numerycznej, np. w celu zastosowania w programach metody elementów skończonych) omawianych modeli. Łukę tę całkowicie wypełnia monografia Simo i Hughesa [252], w której prezentowane są sformułowania i algorytmy MES w odniesieniu do teorii plastyczności małych i dużych deformacji, z różnymi typami wzmocnień i różnymi warunkami plastyczności.

Teorie plastyczności prezentowane przez Gambina i Kowalczyk [98] pozwalają łączyć efekty lokalne występujące w trakcie deformacji plastycznej, dotyczące pojedynczych kryształów (wewnątrz jak i na granicy ziaren) materiału polikrystalicznego (metal) z globalnym warunkiem plastyczności, por. także Nemat-Nasser [202]. W ten sposób otrzymuje się fenomenologiczny model mikroplastycznego płynięcia. Lokalne deformacje plastyczne są jednak znaczne w stosunku do efektu globalnego i wymagają stosowania opisu mechaniki ośrodków ciągłych. Znaczne deformacje plastyczne powodują rozwój tzw. anizotropii plastycznej (por. np. Szczepiński [266]) i w efekcie np. zjawisko lokalizacji odkształceń, por. także Stören i Rice [261], Bigoni i in. [34]. Zjawisko to jest analizowane w monografii Gambina i Kowalczyk na przykładzie blach izotropowych i ortotropowych, przy wykorzystaniu warunków plastyczności Hilla, Barlata i Liana.

W przypadku teorii sprężysto-plastyczności zwykle dokonuje się podziału na zagadnienia brzegowe fizycznie albo geometrycznie nieliniowe, por. np. Zienkiewicz i Taylor [321, 322], Kleiber [162, 163], Crisfield [72, 73], ABAQUS *Theory manual* [1]. W niniejszej monografii podział tego typu będzie stosowany wyłącznie w celu odniesienia się do literatury przedmiotu.

Z uwag i wniosków zamieszczonych w rozprawie doktorskiej Gajewskiego [99], jak i w pracach [101, 103-105, 146, 147] wynika, że teoria sprężystości i plastyczności w przypadku materiałów izotropowych z warunkiem plastyczności Hubera-Misesa [130, 190] oraz materiałów anizotropowych (tj. ortotropowych, transversalnie izotropowych oraz o symetrii regularnej, czy zbrojonych włóknami) z warunkiem Hilla ze wzmocnieniem typu energetycznego, może być stosowana do zagadnień brzegowych dla stosunkowo małych odkształceń sprężystych i dużych odkształceń plastycznych oraz skończonych obrotów cząstek ciała, jeżeli stosowany jest algorytm NLGEOM (uaktualniany opis Lagrange'a).

Dokładny opis zastosowanego sformułowania wariacyjnego zagadnienia brzegowego teorii sprężystości i plastyczności oraz algorytmu całkowania przyrostowych równań konstytutywnych jest zamieszczony na kilkudziesięciu stronach podręcznika teoretycznego programu ABAQUS/Standard [1]. Celowe jest porównanie sformułowania zaproponowanego w programie z opisem podanym w monografii Boneta i Wooda 1997r. [39] oraz w monografii pod redakcją Kleibera 1995r. [163], które dotyczą teorii sprężystości i plastyczności materiałów izotropowych z warunkiem plastyczności MHMH. Ponieważ koncepcja

zastosowanej teorii sprężysto-plastyczności łączy pośrednio zagadnienia hipersprężystości i plastyczności, to zasadniczą niekonsekwencją teorii zastosowanej w programie ABAQUS jest nieadekwatny opis sprężystych właściwości materiału i braku rozróżniania między tensorem naprężenia Cauchy'ego i tensorem naprężenia Kirchhoffa, w sformułowaniu słabym równań równowagi w konfiguracji aktualnej. W teorii plastyczności z warunkiem Hilla występuje nieściślność części plastycznej, co według instrukcji i podręcznika programu ABAQUS ogranicza zakres zastosowań omawianej teorii sprężysto-plastyczności do sytuacji ze stosunkowo małymi odkształceniami sprężystymi (rzędu 5%). Nie wprowadza się żadnych ograniczeń formalnych co do wielkości odkształceń plastycznych i lokalnych obrotów. Testy, które zamieszczono m.in. w [99] pokazują, że ograniczenia stosowanej teorii w zagadnieniach płaskich (płaskiego stanu naprężenia PSN i płaskiego stanu odkształcenia PSO) i przestrzennych powinny dotyczyć także lokalnych obrotów cząstek ciała w zakresie odkształceń sprężystych lub plastycznych. Zagadnienie to było analizowane także przez Casey'a 1985r. [55].

Teoria plastyczności dużych deformacji rozwija się nieustannie od końca lat siedemdziesiątych ubiegłego wieku [32, 39, 45, 126, 201, 218, 310]. Nie istnieje jednak obecnie konsensus odnośnie sposobu sformułowania teorii plastyczności materiałów izotropowych i anizotropowych dużych deformacji. Rozwijane jest równolegle wiele kierunków. Za pionierskie można uznać m.in. prace opublikowane przez Lee [173,174], Hibbitta i in. [123] (jeden z twórców systemu MES ABAQUS [1-5]), Kratochvila [166], Hahna [117], Argyrisa, Doltsinisa i Kleibera [19-21] oraz Casey'a i Naghdiego [58-60]. W pracach tych wyraźnie rysują się dwa nurty odnośnie do wydzielania wielkości charakteryzujących deformację plastyczną. Jeden nurt to rozszerzenie i uogólnienie teorii małych odkształceń, czyli pozostanie przy dekompozycji addytywnej oraz ewentualne wprowadzenie tensorowych miar logarytmicznych odkształceń, np. Hibbitt i in. [123]. Drugi nurt, czerpiący motywację z mechaniki materiałów krystalicznych, postuluje dekompozycję multiplikatywną tensora gradientu deformacji, por. Asaro [23], Lee [173, 174], Clifton [67], Casey i Naghdi [57], Lubarda [179]. Zgodność tego drugiego nurtu kończy się na dekompozycji multiplikatywnej, dalej każdy z elementów formułowanej teorii jest dyskusyjny i wśród badaczy nie ma zgody po dzień dzisiejszy. Rozbieżność dotyczy także formułowania powierzchni plastyczności w przestrzeni stanu naprężenia lub w przestrzeni stanu odkształcenia, por. Naghdi i Trapp [197], Yoder i Whirley [315] czy Xiao i Chen [312]. Trwa dyskusja, czego dowodem mogą być prace z ostatnich lat poświęcone tej tematyce, por. np. pracę Dafaliasa [77, 78], Mariano [185]. Najmniej kontrowersyjne wydają się poglądy zapoczątkowane w pracach Simo [248-251], który w swoich pracach przedstawia teorię plastyczności dużych deformacji materiałów izotropowych przy uwzględnieniu dekompozycji multiplikatywnej, dla sprężystości postulując relację hipersprężystości. Przez ostatnie kilka lat intensywnie rozwijana jest teoria sprężysto-plastyczności z zastosowaniem logarytmicznych tensorów odkształcenia, która łączy hipersprężystość i klasyczne sformułowanie teorii plastyczności ze stowarzyszonym prawem płynięcia, uzupełniona przez odpowiednie obiektywne związki przyrostowe, adekwatne do implementacji w kodach MES. Głównie są to prace zespołu: Xiao, Bruhns i Meyers [46, 47, 188, 299-310].

Teorię hipersprężystoplastyczności stosuje się w tej monografii do rozwiązywania zadań brzegowych w przypadku metali, dla których są dostępne dane materiałowe i możliwa jest weryfikacja doświadczalna, por. np. Stören i Rice [261], Wu i in. [298], Cabezasa i Celentano [50], Ajdukiewicz i in. [7-13] oraz [106, 290].

Bibliografia

- [1] ABAQUS *Theory manual*, Version 6.1., Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, 2000.
- [2] ABAQUS *Theory Manual*, ver.6.11, Dassault Systèmes, 2011.
- [3] ABAQUS/Standard *User's manual*, Version 6.1., Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, 2000.
- [4] ABAQUS/Standard *Verification manual*, Version 5.8., Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, 1998.
- [5] ABAQUS/Standard *Example problems manual*, Version 5.7., Hibbitt, Karlsson and Sorensen, Inc., Pawtucket, 1997.
- [6] Agah-Tehrani A., Lee E.H., Mallet R.L., Onat E.T.: The theory of elastic-plastic deformation at finite strain with induced anisotropy modeled as combined isotropic-kinematic hardening, *J. Mech. Phys. Solids*, vol.35, no.5, pp. 519-539, 1987.
- [7] Ajdukiewicz C., Gajewski M.: Próba weryfikacji relacji konstytutywnych sprężysto-plastyczności w teście rozciągania płaskownika z otworami przy wykorzystaniu systemu optycznej korelacji obrazu, s.15-22, *Logistyka*, 6, 2011.
- [8] Ajdukiewicz C., Gajewski M., Jemioło S.: Eksperymentalna i numeryczna analiza ściskania rur aluminiowych, XVII Polish-Russian-Slovak Seminar Proc. "Theoretical Foundation of Civil Engineering", Part II, s. 50-55, University of Žilina, 2008.
- [9] Ajdukiewicz C., Gajewski M., Jemioło S.: Analiza numeryczna i eksperymentalna niestabilności lokalnych i globalnych przy ściskaniu rur aluminiowych. XXIII Sympozjum Mechaniki Eksperymentalnej Ciała Stałego, Jachranka, październik 2008.
- [10] Ajdukiewicz C., Gajewski M., Jemioło S.: Symulacja numeryczna testu rozciągania płaskownika z uwzględnieniem teorii sprężysto-plastyczności dużych deformacji, 55 Konferencja naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB "Kielce-Krynica", s.15-22, Wydawnictwo Politechniki Świętokrzyskiej, Kielce 2009.
- [11] Ajdukiewicz C., Gajewski M., Jemioło S.: Zastosowanie fotogrametrycznego systemu pomiarowego ARAMIS do wyznaczenia obszarów koncentracji odkształceń, XVIII Russian-Slovak-Polish Seminar "Theoretical Foundation of Civil Engineering", Moscow, Arkhangelsk 1-5.07.2009, s.35-42, OWPW, Warszawa 2009.
- [12] Ajdukiewicz C., Gajewski M., Jemioło S.: Symulacja numeryczna i weryfikacja doświadczalna testu rozciągania płaskownika z uwzględnieniem teorii sprężysto – plastyczności dużych deformacji, Rozdział XIV w monografii *Sprężystość i hipersprężystość. Modelowanie i zastosowania*, S. Jemioło [red.]: s.167-178, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2012.
- [13] Ajdukiewicz C., Gajewski M., Jemioło S., El-Humidi A.: Test twardości Brinella jako zadanie kontaktowe teorii sprężysto-plastyczności dużych deformacji, Rozdział VII monografii: *Deformacje i wytrzymałość materiałów i elementów konstrukcji*, S. Jemioło, A. Szwed [red.], Oficyna Wydawnicza PW, s. 99-108, Warszawa 2013.
- [14] Anand L., Ames N.M., Srivastava V., Chester S.A.: A thermo-mechanically coupled theory for large deformations of amorphous polymers. Part I: Formulation, *International Journal of Plasticity*, 25, pp.1474–1494, 2009.
- [15] Anand L., Aslan O., Chester S.A.: A large-deformation gradient theory for elastic–plastic materials: Strain softening and regularization of shear bands, *International Journal of Plasticity*, 30–31, pp. 116-143, 2012.
- [16] Anand L.: On H. Hencky's approximate strain-energy function for moderate deformations, *ASME J. Appl. Mech.*, 46, pp. 78-82, 1979.
- [17] Anand L.: Moderate deformations in extension-torsion of incompressible isotropic elastic materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 34, 3, pp. 293-304, 1986.
- [18] Antman S.S.: *Nonlinear problems of elasticity*, Springer-Verlag, New York – Budapest, 1995.
- [19] Argyris J.H., Doltsinis J.St., Kleiber M.: Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity – natural approach. Part I, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 11, pp. 215-247, 1977.
- [20] Argyris J.H.: Doltsinis J.St., Kleiber M.: Incremental formulation in nonlinear mechanics and large strain elasto-plasticity – natural approach. Part II, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 14, pp. 259-294, 1978.

- [21] Argyris J.H., Doltsinis J.St.: On the large strain inelastic analysis in natural formulation, Part I: Quasistatic problems, *Comp. Methods Appl. Mech. Engin.*, vol. 20, pp. 213-251, 1979.
- [22] Artioli E., Auricchio F., Beirão da Veiga L.: Second-order accurate integration algorithms for von-Mises plasticity with a nonlinear kinematic hardening mechanism, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196, pp.1827-1847, 2007.
- [23] Asaro R.J.: Crystal Plasticity, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 50, pp. 921-934, 1983.
- [24] Atkin R.J., Fox. N.: *An introduction to the theory of elasticity*, Longman, London, 1980.
- [25] Atluri S.N.: On constitutive relations at finite strain: hypo-elasticity and elasto-plasticity with isotropic or kinematic hardening, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 43, pp.137-171, 1984.
- [26] Badreddine H., Saanouni K., Dogui A.: On non-associative anisotropic finite plasticity fully coupled with isotropic ductile damage for metal forming, *International Journal of Plasticity*, 26, (11), pp.1541-1575, 2010.
- [27] Ball J.M.: Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 66, pp.337-403, 1977.
- [28] Bammann D. J., Johnson G. C.: On the Kinematics of Finite-Deformation Plasticity, *Acta Mechanica*, 70, pp.1-13, 1987.
- [29] Beatty M.F.: Introduction to nonlinear elasticity, in *Nonlinear effects in fluids and solids*, edited by M.M. Carroll and M. Hayes, Plenum Press, New York, pp. 13-112, 1996.
- [30] Bergan P.G., Horrigmoe G., Krakeland B., Soreide T.H.: Solution techniques for non-linear finite element problems, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 12, 1677-1696, 1978.
- [31] Bergan P.G.: Solution algorithms for nonlinear structural problems, *Computers and Structures*, 12, 497-509, 1980.
- [32] Bertram A.: *Elasticity and Plasticity of Large Deformations - An Introduction*, 3rd ed., Springer, 2012.
- [33] Betsch P. Stein E.: Numerical implementation of multiplicative elasto-plasticity into assumed strain elements with application to shells at large strains, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 179, pp. 215-245, 1999.
- [34] Bigoni D., Piccolroaz A.: Yield criteria for quasibrittle and frictional materials, *International Journal of Solids and Structures*, 41, pp. 2855-2878, 2004.
- [35] Blinowski A.: Obroty ciał odkształcalnych, Część I, *Geometria i kinematyka. Prace IPPT*, 7, 1994.
- [36] Blinowski A.: On the kinematics of the sets of oriented elements, *Arch. Mech.*, 46, pp.965-988, 1994.
- [37] Boehler J.P., Sawczuk A.: On Yielding of Oriented Solids, *Acta Mechanica*, 27, pp.185-206, 1977.
- [38] Boehler J.P. (ed.): *Applications of tensor functions in solid mechanics*. CISM Courses and Lectures, No.292, Springer-Verlag, Wien-New York, 1987.
- [39] Bonet J., Wood R.D.: *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*, Cambridge University Press, 1997.
- [40] Bonn R., Haupt P.: Exact solutions for large elastoplastic deformations of a thick-walled tube under internal pressure, *International Journal of Plasticity*, vol. 11, no. 1, pp.99-118, 1995.
- [41] Boukadia J., Sidorff F.: Simple shear and torsion of perfectly plastic single crystal in finite transformations, *Arch. Mech.*, 40, 5-6, pp.497-513, 1988.
- [42] Bowen R.M.: *Introduction to continuum mechanics for engineers*. In: *Mathematical concepts and methods in science and engineering*. Vol.39, Plenum Press, New York and London, 1989.
- [43] Bowen R.M., Wang C.C.: *Introduction to vectors and tensors*, Vol. I and II, Plenum Press, New York, 1976.
- [44] Brepols T., Vladimirov I.N., Reese S.: Numerical comparison of isotropic hypo- and hyperelastic-based plasticity models with application to industrial forming processes, *International Journal of Plasticity*, in print, 2014.
- [45] Bridgman P.W.: *Studies in large plastic flow and fracture*, Harvard University Press, Cambridge, 1964.

- [46] Bruhns O.T., Xiao H., Meyers A.: Hencky's elasticity model with the logarithmic strain measure: a study on Poynting effect and stress response in torsion of tubes and rods, *Arch. Mech.*, 52, 4-5, pp.489-509, 2000.
- [47] Bruhns O.T., Xiao H., Meyers A.: Large simple shear and torsion problems in kinematic hardening elasto-plasticity with logarithmic rate, *International Journals of Solids and Structures*, 38, pp.8701-8722, 2001.
- [48] Brünig M.: Nonlinear finite element analysis based on a large strain deformation theory of plasticity, *Computers and Structures*, 69, pp.117-128, 1998.
- [49] Brünig M.: Numerical simulation of the large elastic-plastic deformation behavior of hydrostatic stress-sensitive solids, *International Journal of Plasticity*, 15 (11), pp.1237-1264, 1999.
- [50] Cabezas E.E., Celentano D.J.: Experimental and numerical analysis of the tensile test using sheet specimens, *Finite Elements in Analysis and Design*, 40, pp.555-575, 2004.
- [51] Caddell R.M., Woodliff A.R.: Macroscopic yielding of oriented polymers, *Journal of Materials Science*, 12, pp.2028-2036, 1977.
- [52] Caminero M.A., Montáns F.J., Bathe K.-J.: Modeling large strain anisotropic elasto-plasticity with logarithmic strain and stress measures, *Computers & Structures*, 89, (11-12), pp.826-843, 2011.
- [53] Canga M.E., Becker E.B.: An iterative technique for the finite element analysis of near-incompressible materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 170, pp.79-101, 1999.
- [54] Carlson D.E., Hoger A.: On the derivatives of the principal invariants of a second-order tensor. *J.Elasticity*, 16, pp.221-224, 1986.
- [55] Casey J.: Approximate kinematical relations in plasticity, *Int. J. Solids Structures*, vol.21, no. 7, pp. 671-682, 1985.
- [56] Casey J.: On elastic-thermo-plastic materials at finite deformations, *International Journal of Plasticity*, vol.14, Nos. 1-3, pp. 173-191, 1998.
- [57] Casey J., Naghdi P.M.: A Remark on the Use of the Decomposition $F=FeFp$ in Plasticity, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 47, pp. 672-675, 1980.
- [58] Casey J., Naghdi P.M.: On the non-equivalence of the stress space and strain space formulations of plasticity theory, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, 50, pp. 350-354, 1983.
- [59] Casey J., Naghdi P.M.: Further constitutive results in finite plasticity, *Q. Jl Mech. Appl. Math.*, vol. 37, Pt. 2, pp. 231-259, 1984.
- [60] Casey J., Naghdi P.M.: On the relationship between the Eulerian and Lagrangian descriptions of finite rigid plasticity, *ARMA*, 102, 4, pp.351-375, 1988.
- [61] Chen W.F.: *Plasticity in reinforced concrete*, McGraw-Hill, New York, 1982.
- [62] Cheviakov A.F., Ganghoffer J.-F., Rahouadj R.: Finite strain plasticity models revealed by symmetries and integrating factors: The case of Dafalias spin model, *International Journal of Plasticity*, 44, pp.47-67, 2013.
- [63] Ciarlet P.G.: *Mathematical elasticity*, North-Holland, Amsterdam-Tokyo, 1988.
- [64] Clayton J.D., Hartley C.S., McDowell D.L.: The missing term in the decomposition of finite deformation, *International Journal of Plasticity*, 52, pp. 51-76, 2014.
- [65] Clayton J.D., McDowell D.L.: A multiscale multiplicative decomposition for elastoplasticity of polycrystals, *International Journal of Plasticity*, 19, pp.1401-1444, 2003.
- [66] Cleja-Țigoiu S., Iancu L.: Orientational anisotropy and strength-differential effect in orthotropic elasto-plastic materials, *International Journal of Plasticity*, 47, pp. 80-110, 2013.
- [67] Clifton R. J.: On the equivalence of $FeFp$ and $FpFe$, *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Brief Notes, pp. 287-289, March 1972.
- [68] Colak O.U.: Modeling of large simple shear using a viscoplastic overstress model and classical plasticity model with different objective stress rates, *Acta Mechanica*, 167 (3-4), pp. 171-187, 2004.
- [69] Collins I.F.: Elastic/plastic models for soils and sands, *International Journal of Mechanical Sciences*, 47, pp. 493-508, 2005.
- [70] Crisfield M.A.: A fast incremental/iterative solution procedure that handles "snap-through", *Computers & Structures*, 13, pp.55-62, 1981.

- [71] Crisfield M.A.: An arc-length method including line searches and accelerations, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 19, pp.1269-1289, 1983.
- [72] Crisfield M.A.: *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 1: Essentials, John Wiley and Sons, Chichester-Singapore, 1991.
- [73] Crisfield M.A.: *Non-linear finite element analysis of solids and structures*, Vol. 2: Advanced topics, John Wiley and Sons, Chichester-Singapore, 1997.
- [74] Curnier A.: *Computational methods in solid mechanics*, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1994.
- [75] Curnier A., Rakotomanana L.: Generalized strain and stress measures: Critical survey and new results. *Engng. Trans.*, 39, pp.461-538, 1991.
- [76] Dacorogna B.: *Direct methods in the calculus of variations*. Applied Mathematical Sciences, 78, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [77] Dafalias Y.F.: The Plastic Spin, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 52, pp.865-871, 1985.
- [78] Dafalias Y.F.: Plastic spin: necessity or redundancy?, *International Journal of Plasticity*, vol.14, no.9, pp.909-931, 1998.
- [79] Dashner P.A.: Invariance considerations in large strain elasto-plasticity, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 53, pp. 55-60, 1986.
- [80] De Souza Neto E.A., Perić D., Owen D.R.J.: A model for elastoplastic damage at finite strains: algorithmic issues and applications, *Engineering Computations*, 11, pp.257-281, 1994.
- [81] De Souza Neto E.A., Perić D., Owen D.R.J.: *Computational Methods for Plasticity, Theory and Applications*, Wiley, 2008.
- [82] Dłużewski P.: Anisotropic Hyperelasticity Based Upon General Strain Measures, *Journal of Elasticity*, 60, pp.119–129, 2000.
- [83] Doll S., Schweizerhof K.: On the development of volumetric strain energy function, *ASME J. Appl. Mech*, 67, pp. 17-21, 2000.
- [84] Drwal G., Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D.: *Mathematica 5*, Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice, 2004.
- [85] Ehlers W., Eipper G.: The simple tension problem at large volumetric strain computed from finite hyperelastic material laws, *Universität Stuttgart*, Nr. 97-II-1, 1997.
- [86] Ericksen J.L.: *Introduction to the thermodynamics of solids*, St. Edmundsbury Press, Suffolk, 1991.
- [87] Eringen A.C.: *Mechanics of continua*, Krieger, Huntington-New York, 1980.
- [88] Eterovic A.L., Bathe K.-J.: A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using the logarithmic stress and strain measures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30, pp. 1099-1114, 1990.
- [89] Eve R.A., Reddy B.D.: The variational formulation and solution of problems of finite-strain elastoplasticity based on the use of dissipation function, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37, pp.1673-1695, 1994.
- [90] Feng Z.Q., de Saxcé G.: Rigid-plastic implicit integration scheme for analysis of metal forming, *Eur. J. Mech., A/Solids*, 15, no.1, pp.51-66, 1996.
- [91] Fish J., Shek K.: Computational aspects of incrementally objective algorithms for large deformation plasticity, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(6), pp. 839-851, 1999.
- [92] Fish J., Shek K.: Finite deformation plasticity based on the additive split of the rate of deformation and hyperelasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, (1–2), pp.75-93, 2000.
- [93] Flanagan D.P., Taylor L.M.: An accurate numerical algorithm for stress integration with finite rotations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 62, pp.305-320, 1987.
- [94] Gadala M.S.: Numerical solutions of nonlinear problems of continua, II. Survey of incompressibility constraints and software aspects, *Comput. Struct.*, 22, pp. 841-855, 1986.
- [95] Gadala M.S.: Unified numerical treatment of hyperelastic and rubber-like constitutive laws, *Communications in Applied Numerical Methods*, 7, pp.581-587, 1991.

- [96] Gadala M.S.: Alternative methods for the solution of hyperelastic problems with incompressibility, *Computers and Structures*, 42, 1, pp.1-10, 1992.
- [97] Gadala M.S., Oravas G.AE.: Numerical solutions of nonlinear problems of continua- I. Survey of formulation methods and solution techniques. *Comput. Struct.*, 19, pp. 865-877, 1984.
- [98] Gambin W., Kowalczyk K.: *Plastyczność metali*, OWPW, Warszawa 2003.
- [99] Gajewski M.: Zastosowanie MES i modelowania konstytutywnego w analizie sprężysto-plastycznych materiałów anizotropowych, praca doktorska (promotor S. Jemioło), Politechnika Warszawska, 2007.
- [100] Gajewski M.: Zastosowanie relacji konstytutywnych plastyczności dużych deformacji w zagadnieniach ze znacznymi lokalnymi obrotami, *Theoretical Foundations of Civil Engineering*, XVI Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions, s.123-130, OW PW Warsaw 2008.
- [101] Gajewski M.: Application of the theory of hyperelastic-plastic materials in the test of static stretching of the rod with circular crosssection, *Logistyka*, 6, s.1041-1048, CD, 2011.
- [102] Gajewski M., Jemioło S.: O utracie stateczności globalnej i lokalnej przy ściskaniu w ramach teorii hipersprężysto-plastyczności dużych deformacji, XIX - Slovak-Polish-Russian Seminar "Theoretical Foundation of Civil Engineering", Slovakia, Žilina, 12-16.09.2010, pp.111-118, ACB, Moscow 2010.
- [103] Gajewski M., Jemioło S.: Zastosowanie relacji konstytutywnych plastyczności dużych deformacji w zagadnieniach brzegowych ze znacznymi lokalnymi obrotami, XXI Russian-Slovak-Polish Seminar, Theoretical Foundation of Civil Engineering, Moscow-Arkhangelsk, 3.07-6.07. 2012, Sz. Lutomirski [ed], Oficyna Wydawnicza PW, s.127-134, Warszawa 2012.
- [104] Gajewski M., Jemioło S.: Zastosowanie relacji konstytutywnych plastyczności dużych deformacji w zagadnieniach brzegowych ze znacznymi obrotami lokalnymi, Rozdział I w monografii Teoretyczne podstawy budownictwa, Tom I. Mechanika materiałów i konstrukcji, S. Jemioło, Sz. Lutomirski [red.]: s.9-18, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2012.
- [105] Gajewski M., Jemioło S.: Lokalizacja odkształceń plastycznych w płaskich rozciąganych elementach metalowych z materiału izotropowego i anizotropowego, Rozdział II w monografii Teoretyczne podstawy budownictwa, Tom I. Mechanika materiałów i konstrukcji, S. Jemioło, Sz. Lutomirski [red.]: s. 19-30, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2012.
- [106] Garbowski T., Maier G., Novati G.: On calibration of orthotropic elastic-plastic constitutive models for paper foils by biaxial tests and inverse analyses, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Journal of the International Society for Structural and Multidisciplinary Optimization, Volume 46, Issue 1, pp. 111-128, Springer, 2011.
- [107] Gliński H., Grzymkowski R., Kapusta A., Słota D.: *Mathematica 8.0*, Pracownia Komputerowa Jacka Skalmierskiego, 2012.
- [108] Gratacos P., Montmitonnet P., Chenot J.L.: An integration scheme for Prandtl-Reuss elastoplastic constitutive equations, *Int. J. for Numerical Methods and Engineering*, 33, pp.943-961, 1992.
- [109] Green A.E., Adkins J.E.: *Large Elastic Deformations*, Clarendon Press, Oxford, 1970.
- [110] Green A.E., Zerna W.: *Non-linear elastic deformations*, Horwood, Chichester, 1968.
- [111] Grzesikiewicz W., Wakulicz A., Zbiciak A.: Mathematical modelling of rate-independent pseudoelastic SMA material, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 46, no. 6, pp. 870-876, 2011.
- [112] Grzesikiewicz W., Wojewódzki W., Zbiciak A.: Non-smooth dynamic problem formulation for elastic-perfectly plastic solid, XI Konferencja Polsko-Ukraińska „Theoretical Foundations of Civil Engineering, OWPW, s. 339-350, Warszawa 2003.
- [113] Guo Z-H: Representations of orthogonal tensors. *SM Archives*, 6, pp. 451-466, 1981.
- [114] Guo Z-H: Rates of stretch tensors. *J. Elasticity*, 14, pp. 263-267, 1984.
- [115] Gurtin M.E.: *An introduction to continuum mechanics*, in: Mathematics in science and engineering, Vol.158, Academic Press, New York - San Francisco, 1981.
- [116] Gurtin M.E., Spear K.: On the relationship between the logarithmic strain rate and the stretching tensor. *Int. J. Solids Structures*, 19, 5, pp. 437-444, 1983.
- [117] Hahn H.T.: A finite-deformation theory of plasticity, *Int. J. Solids Structures*, 10, pp.111-121, 1974.

- [118] Han C.-S., Chung K., Wagoner R.H., Oh S.-I.: A multiplicative finite elasto-plastic formulation with anisotropic yield functions, *International Journal of Plasticity*, 19, pp. 197-211, 2003.
- [119] Hanyga A.: *Mathematical theory of non-linear elasticity*, PWN, Warszawa, Ellis Horwood Limited Publishers, Chichester, 1985.
- [120] Hartmann S., Neff P.: Polyconvexity of generalized polynomial-type hyperelastic strain energy functions for near-incompressibility, *International Journal of Solids and Structures* 40, pp. 2767–2791, 2003.
- [121] Helmwein P.: Some remarks on the compressed matrix representation of symmetric second-order and forth-order tensors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp. 2753-2770, 2001.
- [122] Hencky H.: Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen, *ZAMM*, 4, pp. 323-334, 1924.
- [123] Hibbitt H.D., Marcal P.V., Rice J.R.: A finite element formulation for problems of large strain and large displacement, *Int. J. Solids Structures*, vol. 6, pp. 1069-1086, 1970.
- [124] Hill R.: A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic metals, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A* 193, pp. 281-297, 1948.
- [125] Hill R.: *The mathematical theory of plasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1950.
- [126] Hill R.: On the problem of uniqueness in the theory of rigid-plastic solid – III, *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, 5, pp. 153-161, 1957.
- [127] Hoger A.: The stress conjugate to logarithmic strain, *Int. J. Solids Structures*, vol. 23, no. 12, pp. 1645-1656, 1987.
- [128] Holsapple K.A.: A finite elastic-plastic theory and invariance requirements, *Acta Mechanica*, 17, pp. 277-290, 1973.
- [129] Houlsby G.T., Puzrin A.M.: A thermomechanical framework for constitutive models for rate-independent dissipative materials, *International Journal of Plasticity*, 16, pp. 1017-1047, 2000.
- [130] Huber M.T.: Przyczynek do podstaw teorii wytrzymałości. *Czasopismo Techniczne*, Lwów, 22, 1904, także Pisma, t.II, PWN, Warszawa, 1956.
- [131] Hughes T.J.R., Winget J.: Finite rotation effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large-deformation analysis, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pp. 1862-1867, 1980.
- [132] Itskov M.: On the theory of forth-order tensors and their applications in computational mechanics, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189, pp. 419-438, 2000.
- [133] Itskov M.: On the application of the additive decomposition of generalized strain measures in large strain plasticity, *Mechanics Research Communications*, 31, pp. 507-517, 2004.
- [134] Itskov M., Aksel N.: A constitutive model for orthotropic elasto-plasticity at large strains, *Archive of Applied Mechanics*, 74, pp. 75-91, 2004.
- [135] Jemioło S.: Zastosowanie niewielomianowych funkcji tensorowych do budowy równań konstytutywnych materiałów anizotropowych, rozprawa doktorska (promotor W. Wojewódzki), Politechnika Warszawska, Warszawa 1991.
- [136] Jemioło S.: Translacyjne izotropowe i ortotropowe wzmocnienie w materiałach anizotropowych. Sem. Teoretyczne Podstawy Budownictwa 30.06.92-1.07.92 Warszawa, *Proc. Moskwa*, s.89-94, 1992.
- [137] Jemioło S.: Simple determination of stretch and rotation tensors, more general isotropic tensor-valued functions of deformation, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol 32, No.3, pp. 653-673, 1994.
- [138] Jemioło S.: Regularne izotropowe funkcje tensorowe i ich aplikacja w teorii plastyczności, *Proc. VI Polish-Ukrainian Seminar, Theoretical Foundations of Civil Engineering*, Warsaw 6.07-11.07.1998, W. Szcześniak (ed.), Oficyna Wydawnicza PW, s.129-140, 1998.
- [139] Jemioło S.: O dualnych relacjach konstytutywnych i kulisto-symetrycznych zagadnieniach brzegowych idealnej plastyczności Druckera-Pragera, *Proc. VI Polish-Ukrainian Seminar, Theoretical Foundations of Civil Engineering*, Warsaw 6.07-11.07.1998, W. Szcześniak (ed.), Oficyna Wydawnicza PW, s.141-148, 1998.
- [140] Jemioło S.: Studium hipersprężystych własności materiałów izotropowych. Modelowanie i implementacja numeryczna, *Prace Naukowe, Budownictwo* z. 140, s.1-308, Warszawa 2002.

- [141] Jemioło S.: Najprostsze modele hipersprężystości izotropowych materiałów nieściśliwych, mało ściśliwych i ściśliwych, Część I. Podstawowe relacje konstytutywne, Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, W. Szczesniak (ed.), s. 177-186, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2002.
- [142] Jemioło S., Najprostsze modele hipersprężystości izotropowych materiałów nieściśliwych, mało ściśliwych i ściśliwych, Część II. Specyfikacja funkcji i parametrów materiałowych, Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, W. Szczesniak (ed.), s. 187-202, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2002.
- [143] Jemioło S.: Najprostsze modele hipersprężystości izotropowych materiałów nieściśliwych, mało ściśliwych i ściśliwych, Część III. Implementacja numeryczna w MES, Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, W. Szczesniak (ed.), s.203-210, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2002.
- [144] Jemioło S. [red.]: Sprężystość i hipersprężystość. Modelowanie i zastosowania, Oficyna Wydawnicza PW, s.1-178, Warszawa 2012.
- [145] Jemioło S., Gajewski M.: Model hipersprężystości izotropowych nieściśliwych elastomerów, Cz.3. Analiza lokalnego wyboczenia ściskanych grubościennych cylindrów w zakresie dużych deformacji, Theoretical Foundations of Civil Engineering, Polish-Ukrainian Transactions, W. Szczesniak (ed.), s. 309-316, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa 2001.
- [146] Jemioło S., Gajewski M., Analiza MES testu rozciągania pręta z uwzględnieniem dużych deformacji, XIV Polsko-Rosyjsko-Słowackie Seminarium, Teoretyczne podstawy budownictwa, s.35-40, University of Žilina, Žilina 2005.
- [147] Jemioło S., Gajewski M.: Ekspansja cylindra grubościennego jako zadanie testowe hipersprężystoplastyczności, Theoretical Foundations of Civil Engineering, XVIII Polish-Ukrainian-Lithuanian Transactions, vol. 18, s. 151-156, OW PW Warsaw 2010.
- [148] Jemioło S., Giżejowski M.: Modele konstytutywne ze zmiennymi wewnętrznymi do opisu zachowania się stali, Cz.1: Podstawy termodynamiczne”, Prace Naukowe, Budownictwo z. 138, s.99-121, Warszawa 2001.
- [149] Jemioło S., Giżejowski M.: Modele konstytutywne ze zmiennymi wewnętrznymi do opisu zachowania się stali, Cz.2: Modele lepkoplastyczności i plastyczności”, Prace Naukowe, Budownictwo z. 138, s.123-150, Warszawa 2001.
- [150] Jemioło S., Lewiński T.: Hyperelastic nonhomogeneous materials with a polyconvex potential. Numerical implementation in ABAQUS, in: 2nd European Conference on Computational Mechanics, Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, ECCM-2001, Cracow, Poland, June 26-29, 2001, Abstracts, Vol.2, Waszczyszyn Z., Pamin J. [eds], pp. 610-611, „Vesalius” Publisher, Cracow (the full-length paper, CD-ROM Proceedings).
- [151] Jemioło S., Małyżko L.: *MES I modelowanie konstytutywne w analizie zniszczenia konstrukcji murowych, Tom 1. Podstawy teoretyczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Warmińsko-Mazurskiego, Olsztyn, 2013.
- [152] Jemioło S., Szwed A.: Konstrukcja powierzchni plastyczności izotropowych i anizotropowych metali, VI Sem. Polsko-Rosyjskie, Teoretyczne podstawy budownictwa, Moskwa, Irkuck, Ułan-Ude, 2-5.07, Proc., s.87-92, 1997.
- [153] Jemioło S., Szwed A.: O zastosowaniu funkcji wypukłych w teorii wyężenia materiałów izotropowych. Propozycja warunków plastyczności metali, WPW, Prace Naukowe, Budownictwo z. 133, s.5-51, 1999.
- [154] Jemioło S., Szwed A.: O interpretacjach różnych rodzajów wzmocnienia na przykładzie warunku plastyczności Maxwella-Hubera-Misesa-Hencky’ego, Polish-Ukrainian Transactions, Theoretical Foundations of Civil Engineering, W. Szczesniak (ed.), Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, s.145-156, 2000.
- [155] Jemioło S., Telega J.J.: Representations of tensor functions and applications in continuum mechanics, IFTR Reports, Warsaw, 3/1997.
- [156] Jemioło S., Telega J.J.: Modelling elastic behaviour of soft tissues. Part I.; Part II. Transverse isotropy, Eng. Trans., **49**, 2-3, 2001, pp. 213-281.
- [157] Johansson G.: On the non-oscillation criterion for multiplicative anisotropic plasticity at large simple shear deformation, International Journal of Plasticity, 24 (7), pp. 1190-1204, 2008.
- [158] Johnson K.L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, 1987.

- [159] Kamenjarzh J. A.: *Limit analysis of solids and structures*, CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [160] Kenga D., Doyle J.F., Sun C.T.: The characterization of boron/aluminum composite in the nonlinear range as an orthotropic elastic-plastic material, *Journal of Composite Materials*, 21, pp. 516-531, 1987.
- [161] Khan A. S., Huang S.: *Continuum theory of plasticity*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- [162] Kleiber M.: *Metoda elementów skończonych w nieliniowej mechanice kontinuum*, PWN, Warszawa-Poznań, 1985.
- [163] Kleiber M. (ed.): *Mechanika techniczna t. 11, Komputerowe metody mechaniki ciał stałych*, PWN, Warszawa, 1995.
- [164] Kossa A., Szabó L.: Exact integration of the von Mises plasticity model with combined linear isotropic-kinematic hardening, *Int. J. of Plasticity*, 25, pp.1083-1106, 2009.
- [165] Kowalczyk-Gajewska K., Pamin J., Żebro T.: Development of gradient-enhanced damage-plasticity formulations for large deformations, *Czasopismo Techniczne, Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej*, z. 3, s.47-58, 2008.
- [166] Kratochvil J.: On a Finite Strain Theory of Elastic-Inelastic Materials, *Acta Mechanica*, 16, pp. 127-142, 1973.
- [167] Kuczma M.: *Podstawy mechaniki konstrukcji z pamięcią kształtu, Modelowanie i numeryka*, Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, 2010.
- [168] Kuroda M.: Interpretation of the behavior of metals under large plastic shear deformations: a macroscopic approach, *International Journal of Plasticity*, vol.13, no. 4, pp. 359-383, 1997.
- [169] Kuroda M.: Interpretation of the behavior of metals under large plastic shear deformations: comparison of macroscopic predictions to physically based predictions, *International Journal of Plasticity*, 15, pp.1217-1236, 1999.
- [170] Kuroda M., Tvergaard V.: Forming limit diagrams for anisotropic metal sheets with different yield criteria, *International Journal of Solids and Structures*, 37, pp. 5037-5059, 2000.
- [171] Kwaśniewski L., Ziółkowski A.: Simplified analytical model and numerical simulations of finite-disturbance buckling of columns, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 51, pp. 121-131, 2013.
- [172] Lemaitre J., Chaboche J-L.: *Mechanics of solid materials*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [173] Lee E.H.: Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains, *Journal of Applied Mechanics*, 36, pp. 1-6, 1969.
- [174] Lee E.H.: Some comments on elastic-plastic analysis, *Int. J. Solids Structures*, 17, pp. 859-872, 1981.
- [175] Le Tallec P., Numerical methods for nonlinear three-dimensional elasticity, in: *Handbook of Numerical Analysis*, Vol. III, P.G. Ciarlet and J.L. Lions [eds], Elsevier Science, Amsterdam, pp. 465-622, 1994.
- [176] Liu C.-S., Hong H.-K.: Non-oscillation criteria for hypoelastic models under simple shear deformation, *Journal of elasticity*, 57, pp. 201-241, 1999.
- [177] Loret B.: On the effects of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials, *Mechanics of Materials*, 2, pp. 287-304, 1983.
- [178] Loret B., Hammoum F., Dafalias Y.F.: Computational aspects of large elastoplastic deformations in the presence of anisotropy and plastic spin, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 105, pp. 151-180, 1993.
- [179] Lubarda V.A.: Duality in constitutive formulation of finite-strain elastoplasticity based on FeFp and FpFe decompositions, *International Journal of Plasticity*, 15, pp. 1277-1290, 1999.
- [180] Lubliner J.: On the thermodynamic foundations of non-linear solid mechanics, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 7, pp. 237-254, 1972.
- [181] Lubliner J.: On the Structure of the Rate Equations of Materials with Internal Variables, *Acta Mechanica*, 17, pp. 109-119, 1973.
- [182] Lubliner J.: A Maximum-Dissipation Principle in Generalized Plasticity, *Acta Mechanica*, 52, pp.225-237, 1984.
- [183] Lubliner J.: *Plasticity theory*. Macmillan Publishing Company, New York, 1990.
- [184] Malinin M.N., Rżysko J.: *Mechanika materiałów*, PWN, Warszawa, 1981.

- [185] Mariano P.M.: On the axioms of plasticity, *Int. J. Solids Structures*, vol. 35, no. 13, pp.1313-1324, 1998.
- [186] Marsden J.E., Hughes T.J.R.: *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1983.
- [187] Maxwell J.C.: Letter from J.C. Maxwell to W. Thomson (Lord Kelvin), 18. Dec. 1856, in *Origins of Clerk Maxwell's electric ideas*, J. Larmor [ed], Cambridge University Press, pp.31-33, 1937.
- [188] Meyers A., Bruhns O.T., Xiao H.: Large strain response of kinematic hardening elastoplasticity with logarithmic rate: Swift effect in torsion, *Meccanica*, 35, pp.229-247, 2000.
- [189] Miehe C., Apel N., Lambrecht M.: Anisotropic additive plasticity in the logarithmic strain space: modular kinematic formulation and implementation based on incremental minimization principles for standard materials, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191, pp. 5383-5425, 2002.
- [190] Mises R.: *Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen*, ZAMM, **8**,161-185, 1928.
- [191] Mitchell G.P., Owen D.R.J.: Numerical Solutions for elastic-plastic problems, *Eng. Comput.*, 5, pp. 274-284, 1988.
- [192] Montáns F.J.: Implicit algorithms for J_2 -plasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 189, pp. 673-700, 2000.
- [193] Mróz Z (1967). On the description of anisotropic workhardening. *J. Mech. Phys. Solids*, 15, pp.163-175, 1967.
- [194] Mróz Z (1969). An attempt to describe the behavior of metals under cyclic loads using a more general workhardening model. *Acta Mechanica*, 7, pp.199-212, 1969.
- [195] Murnaghan F.D.: *Finite deformation of an elastic solids*, J. Wiley, New York, 1951.
- [196] Naghdabadi R., Yeganeh M., Saidi A.R.: Application of corotational rates of the logarithmic strain in constitutive modeling of hardening materials at finite deformations, *International Journal of Plasticity*, 21, pp.1546–1567, 2005.
- [197] Naghdi P.M., Trapp J.A.: The significance of formulating plasticity theory with reference to loading surfaces in strain space, *Int. J. Engng Sci.*, vol.13, pp. 785-797, 1975.
- [198] Nagtegaal J.C.: On the implementation of inelastic constitutive equations with special reference to large deformation problems, *Comput. Methods Appl. Engrg.*, 33, pp.469-484, 1982.
- [199] Nagtegaal J.C., Parks D.M., Rice J.R.: On numerically accurate finite element solutions in the fully plastic range, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 4, pp. 153-177, 1974.
- [200] Needleman A., Tvergaard V.: Necking of biaxially stretched elastic-plastic circular plates, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 25, pp.159-183, 1977.
- [201] Nemat-Nasser S.: On finite deformation elasto-plasticity, *Int. J. Solids Structures*, vol. 18, no. 10, pp. 857-872, 1982.
- [202] Nemat-Nasser S.: On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials, *Transactions of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, pp.1114-1126, 1983.
- [203] Nowacki W.: *Teoria sprężystości*, PWN, Warszawa 1970.
- [204] Oden J.T.: *Finite elements of nonlinear continua*, McGraw-Hill, New York, 1972.
- [205] Ogden R.W.: *Non-linear elastic deformations*, Ellis Horwood, Chichester, 1984.
- [206] Olesiak: O warunku plastyczności Hubera-Misesa, *Mech. Teor. Stos.*, 13, s.523-528, 1975.
- [207] Olszak W. (red.): *Teoria plastyczności*, PWN, Warszawa, 1965.
- [208] Ostrowska-Maciejewska J.: *Mechanika ciał odkształcalnych*, PWN, Warszawa, 1995.
- [209] Ostrowska-Maciejewska J., Kowalczyk-Gajewska K.: *Rachunek tensorowy w mechanice ośrodków ciągłych*, Biblioteka Mechaniki Stosowanej. Seria A: Monografie, Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN, Warszawa, 2013.
- [210] Panoskaltsis V. P., Polymenakos L. C., Soldatos D.: On large deformation generalized plasticity, *J. of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 3, No. 3, pp.441-457, 2008.
- [211] Papadopoulos P., Lu J.: A general framework for the numerical solution of problems in finite elasto-plasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 159, pp.1-18, 1998.

- [212] Papadopoulos P., Lu J.: On the formulation and numerical solution of problems in anisotropic finite plasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp.4889-4910, 2001.
- [213] Pelc J.: Parametric study of a pneumatic tire under inflation using the FEM approach, *J. Theoret. Appl. Mech.*, 36 (1), pp.109-120, 1998.
- [214] Pelc J.: Towards realistic simulation of deformations and stresses in pneumatic tyres, *Applied Mathematical Modelling*, 31 (3), pp. 530-540, 2007.
- [215] Perić D., Owen D.R.J., Honnor M.E.: A model for finite strain elasto-plasticity based on logarithmic strains: Computational issues, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94, pp. 35-61, 1992.
- [216] Perić D., Vaz M. Jr., Owen D.R.J.: On adaptive strategies for large deformations of elasto-plastic solids at finite strains: computational issues and industrial applications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 176, pp. 279-312, 1999.
- [217] Perzyna P.: *Teoria lepkoplastyczności*, PWN, Warszawa, 1966.
- [218] Petryk H.: Niejednoznaczność i niestateczność procesów deformacji plastycznych, *Prace IPPT* 7/1987.
- [219] Piechna J.R.: *Programowanie w języku Fortran 90 i 95*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, 2000.
- [220] Pietrzyk M., Kusiak J., Sadok L. (eds.): *Huber's Yield Criterion in Plasticity*, Wydawnictwo Akapit, 1994.
- [221] Pinsky P.M., Ortiz M., Pister K.S.: Numerical integration of rate constitutive equations in finite deformation analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 40, pp. 137-158, 1983.
- [222] Ploch J.: *Algebra i analiza tensorów*, WPW, Warszawa, 1990.
- [223] Polizzotto C.: A nonlocal strain gradient plasticity theory for finite deformations, *International Journal of Plasticity*, 25, pp.1280–1300, 2009.
- [224] Ponthot J.P.: Unified stress update algorithms for the numerical simulation of large deformation elasto-plastic and elasto-viscoplastic processes, *International Journal of Plasticity*, 18 (1), pp. 91-126, 2002.
- [225] Quoc S. N.: *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*, John Wiley & Sons, LTD, 2000.
- [226] Rajagopal K.R., Srinivasa A.R.: Mechanics of the inelastic behaviour of materials. Part I: Theoretical underpinnings, *International Journal of Plasticity*, vol. 14, no. 10-11, pp. 945-967, 1998.
- [227] Rajagopal K.R., Srinivasa A.R.: Mechanics of the inelastic behaviour of materials. Part II: Inelastic response, *International Journal of Plasticity*, vol. 14, no. 10-11, pp. 969-995, 1998 (b).
- [228] Rakowski G., Kacprzyk Z.: *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, OWPW, Warszawa 2005.
- [229] Reddy B.D., Martin J.B.: Internal variable formulations of problems in elastoplasticity: Constitutive and algorithmic aspects, *Appl Mech Rev*, 47 (9), 1994.
- [230] Reddy B.D., Martin J.B., Griffin T.B.: Extremal Paths and Constitutive Laws in Elastoplasticity, UCT/CSIR Applied Mechanics, Research Unit Technical Report no.82, University of Cape Town, 1986.
- [231] Reese S., Wriggers P.: A material model for rubber-like polymers exhibiting plastic deformations: computational aspects and a comparison with experimental results, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 148, pp. 279-298, 1997.
- [232] Riks E.: The application of Newton's method to the problem of elastic stability, *J. Appl. Mech.*, December, pp. 1060-1065, 1972.
- [233] Riks E.: Progress in collapse analyses, *J. Pressure Vessel and Technology*, 109, pp. 33-41, 1987.
- [234] Rockafellar R.T.: *Convex analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.
- [235] Rojek J., Zienkiewicz O.C., Oñate E., Postek E.: Advances in FE explicit formulation for simulation of metalforming processes, *Journals of Materials Processing Technology*, 119, pp. 41-47, 2001.
- [236] Rosakis P., Simpson H.C.: On the relation between polyconvexity and rank-one convexity in nonlinear elasticity, *J. Elasticity*, 1995, 37, 113-137.

- [237] Rubinstein R., Atluri S.N.: Objectivity of incremental constitutive relations over finite time steps in computational finite deformation analyses, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 36, pp. 277-290, 1983.
- [238] Rychlewski J.: „CEIIINOSSSTTUV” Mathematical structure of elastic bodies, Report of the Institute for Problems in Mechanics of the Academy of Sciences of the USSR, No. 217, Moscow, 1983.
- [239] Rychlewski J.: Elastic energy decompositions and limit criteria, (in Russian), *Advances in Mechanics*, Vol.7, No.3, pp.51-80, 1984.
- [240] Rymarz Cz.: *Mechanika ośrodków ciągłych*, PWN, Warszawa, 1993.
- [241] Sawczuk A.: *Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych*, PWN, Warszawa, 1982.
- [242] Sawczuk A.: *Mechanics and plasticity of structures*, Ellis Horwood Limited, 1989.
- [243] Sawczuk A., Stutz P.: On formulation of stress-strain relations for soils at failure. *ZAMP*, 19, pp.770-778, 1968.
- [244] Sedov L.I.: *Introduction to continuum mechanics (in Russian)*, Moscow, 1962.
- [245] Seth B.R.: Generalized strain measure with applications to physical problems, in: *Second-order effects in elasticity, plasticity and fluid dynamics*, M. Reiner, D. Abir (eds), Pergamon Press, New York, pp. 162-172, 1964.
- [246] Schieck B., Stumpf H.: The appropriate corotational rate, exact formula for the plastic spin and constitutive model for finite elastoplasticity, *Int. J. Solids Structures*, vol.32, no.24, pp. 3643-3667, 1995.
- [247] Šilhavy' M.: *The mechanics and thermodynamics of continuous media*, Springer, Berlin – Tokyo, 1997.
- [248] Simo J.C.: On the computational significance of the intermediate configuration and hyperelastic stress relations in finite deformation elastoplasticity, *Mechanics of Materials*, 4, pp. 439-451, 1985.
- [249] Simo J.C.: On a fully three-dimensional finite-strain viscoelastic damage model: formulation and computational aspects, *Comp. Methods Appl. Mech. Engin.*, vol. 60, pp. 153-173, 1987.
- [250] Simo J.C.: A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part I: Continuum formulation, *Comp. Methods Appl. Mech. Engin.*, vol. 66, pp. 199-219, 1988.
- [251] Simo J.C.: A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition. Part II: Computational aspects, *Comp. Methods Appl. Mech. Engin.*, vol. 68, pp. 1-31, 1988.
- [252] Simo J.C., Hughes T. J. R.: *Computational inelasticity*, Springer - Verlag, Inc., New York, 1998.
- [253] Simo J.C., Ortiz M.: A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 49, pp. 221-245, 1985.
- [254] Simo J.C., Pister K.S.: Remarks on rate constitutive equations for finite deformation problems: Computational implications, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46, pp. 201-215, 1984.
- [255] Simo J.C., Taylor R.L.: Consistent tangent operators for rate independent elastoplasticity, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, pp. 101-118, 1985.
- [256] Smith D.R.: *An introduction to continuum mechanics – after Truesdell and Noll*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1995.
- [257] Spencer A.J.M.: *Continuum mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1980.
- [258] Srinivasa A.R.: Large deformation plasticity and the Poynting effect, *International Journal of Plasticity*, 17, pp. 1189-1214, 2001.
- [259] Stein E. [ed.]: *Progress in computational analysis of inelastic structures*, Springer-Verlag, Wien-New York, 1993.
- [260] Stumpf H., Badur J.: On Missing Links of Rate-Independent Elasto-Plasticity at Finite Strains, *Mechanics Research Communications*, 17(5), pp.353-364, 1990.
- [261] Stören S., Rice J.R.: Localized necking in thin sheets, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 23, pp.421-441, 1975.

- [262] Svendsen B.: A thermodynamic formulation of finite deformation elastoplasticity with hardening, *International Journal of Plasticity*, 14 (6), pp. 473-488, 1998.
- [263] Svendsen B., Arndt S., Klingbeil D., Sievert R.: Hyperelastic models for elastoplasticity with non-linear isotropic and kinematic hardening at large deformation, *Int. J. Solids Structures*, vol. 35, no. 25, pp. 3363-3389, 1998.
- [264] Szabó L.: A semi-analytical integration method for J2 flow theory of plasticity with linear isotropic hardening, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198, pp.2151-2166, 2009.
- [265] Szabó L., Jonas J.J.: Consistent tangent operator for plasticity models based on the plastic strain rate potential, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 128, pp.315-323, 1995.
- [266] Szczepiński W.: On deformation-induced plastic anisotropy of sheet metals, *Arch. Mech.*, 45, s. 3-38, 1993.
- [267] Szmelter J.: *Metody komputerowe w mechanice*, PWN, Warszawa, 1980.
- [268] Taylor L.M., Becker E.B.: Some computational aspects of large deformation, rate-dependent plasticity problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 41, pp. 251-277, 1983.
- [269] Theocaris P.S.: Failure criteria for isotropic bodies revisited, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 51, no. 2, pp. 239-264, 1995.
- [270] Ting T.C.T.: Determination of $\mathbf{C}^{1/2}$, $\mathbf{C}^{-1/2}$ and more general isotropic tensor functions of $\mathbf{C}$. *J. Elasticity*, 15, 319-323, 1985.
- [271] Treloar L.R.G.: *The physics of rubber elasticity*, Clarendon Press, Oxford, 1975.
- [272] Truesdell C.: General and exact theory of waves in finite elastic strains, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 8, 1961.
- [273] Truesdell C.: The main unsolved problem in finite elasticity theory, *ZAMP*, 36, pp. 97-103, English translation in *Foundations of elasticity theory*, Truesdell C. (ed), International Science Review Series, Gordon and Breach, New York, 1965.
- [274] Truesdell C., Noll W.: *The non-linear field theories of mechanics*, Handbuch der Physik, Vol.III/3. Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- [275] Tvergaard V., Needleman A., Lo K. K.: Flow localization in the plane strain tensile test, *J. Mech. Phys. Solids*, vol.29, no. 2, pp.115-142, 1981.
- [276] Volokh K.Y.: An approach to elastoplasticity at large deformations, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 39, pp.153-162, 2013.
- [277] Wang C.C.: On representations for isotropic functions, Part I and II. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 33, 249-287, 1969.
- [278] Wang C.C.: A new representation theorem for isotropic functions, Part I and II. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 36, 166-223, 1970.
- [279] Wang C.C.: Corrigendum. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 43, pp. 392-395, 1971.
- [280] Wang C.C., Truesdell C.: *Introduction to rational elasticity*, Noordhoff, Leyden, 1973.
- [281] Wang J., Wagoner R.H.: A practical large-strain solid finite element for sheet forming, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 63, pp. 473-501, 2005.
- [282] Ward J.M.: *Mechaniczne własności polimerów jako tworzyw konstrukcyjnych*, PWN, Warszawa, 1975.
- [283] Washizu K.: *Variational methods in elasticity and plasticity*, Third edition, Pergamon Press, Oxford-Frankfurt, 1982.
- [284] Wcisło B., Pamin J.: Numerical simulations of strain localization for large strain damage-plasticity model, *Computer Methods in Materials Science*, 13 (2), pp. 231 – 237, 2013.
- [285] Wcisło B., Pamin J., Kowalczyk-Gajewska K.: Gradient-enhanced damage model for large deformations of elastic-plastic materials, *Arch. Mech.*, 65 (5), pp. 407–428, 2013.
- [286] Wcisło B., Żebro T., Kowalczyk-Gajewska K., Pamin J., Finite strain inelastic models with gradient averaging and AceGen implementation, *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)*, Vienna, Austria, 10-14 September, 1, 1-15, 2012.
- [287] Wesołowski Z.: *Zagadnienia dynamiczne nieliniowej sprężystości*, PWN, Warszawa, 1974.

- [288] Wesołowski Z., Woźniak Cz.: *Podstawy nieliniowej teorii sprężystości*, PWN, Warszawa, 1970.
- [289] Wheeler L.: On the derivatives of the stretch and rotation with respect to the deformation gradient. *J. Elasticity*, 24, 129-133, 1990.
- [290] Wojciechowski J.: Zastosowanie systemu optycznej korelacji obrazu do wyznaczenia parametrów materiałowych w modelach konstytutywnych sprężysto-plastyczności metali, Praca magisterska, wykonana pod kierunkiem M. Gajewskiego, Warszawa 2013.
- [291] Wojewódzki W.: Nośność graniczna płyt, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, 1995.
- [292] Wojewódzki W.: Nośność graniczna powłok, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, 2002.
- [293] Wojewódzki W.: Nośność graniczna konstrukcji prętowych, Oficyna Wydawnicza PW, Warszawa, 2012.
- [294] Wojewódzki W., Jemioło S., Lewiński P., Szwed A.: O relacjach konstytutywnych modelujących własności mechaniczne betonu, *Prace Naukowe, Budownictwo*, z. 128, Oficyna Wydawnicza PW, s. 1-150, Warszawa, 1995.
- [295] Wolfram S.: *The MATHEMATICA book*, Wolfram Media/Cambridge University Press, 1996.
- [296] Wriggers P.: Continuum mechanics, Nonlinear finite element techniques and computational stability, in: *Progress in computational analysis of inelastic structures*, E. Stein (ed), Springer-Verlag, Wien-New York, pp.245-287, 1993.
- [297] Wriggers P., Laursen T. A. (eds): *Computational Contact Mechanics*, Springer, 2007.
- [298] Wu H.-Ch., Xu Z., Wang P.T.: Torsion test of aluminium in the large strain range, *International Journal of Plasticity*, 13, pp. 873-892, 1998.
- [299] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: Hypo-elasticity model based upon the logarithmic stress rate, *J. Elasticity*, 47, pp. 51-68, 1997.
- [300] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: Logarithmic strain, logarithmic spin and logarithmic rate, *Acta Mechanica*, 124, pp. 89-105, 1997.
- [301] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: Direct relationship between the Lagrangean logarithmic strain and the Lagrangean stretching and the Lagrangean Kirchhoff stress, *Mech. Res. Comm.*, 25, 1, pp. 59-67, 1998.
- [302] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: Objective corotational rates and unified work-conjugacy relation between Eulerian and Lagrangean strain and stress measures, *Arch. Mech.*, 6, 50, pp. 1015-1045, 1998.
- [303] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: Strain rates and material spins, *J. Elasticity*, 52, pp. 1-41, 1998.
- [304] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: On objective corotational rates and their defining spin tensors, *Int. J. Solids Structures*, vol. 35, no. 30, pp. 4001-4014, 1998.
- [305] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: A Natural Generalization of Hypoelasticity and Eulerian Rate Type Formulation of Hyperelasticity, *J. Elasticity* 56, pp. 59-93, 1999.
- [306] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: A consistent finite elastoplasticity theory combining additive and multiplicative decomposition of the stretching and the deformation gradient, *International Journal of Plasticity*, 16, pp. 143-177, 2000.
- [307] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: Large strain responses of elastic-perfect plasticity and kinematic hardening plasticity with the logarithmic rate: Swift effect in torsion, *International Journal of Plasticity*, 17, pp. 211-235, 2001.
- [308] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: Explicit dual stress-strain relations of incompressible isotropic hyperelastic solids via deviatoric Hencky strain and Cauchy stress, *Acta Mechanica*, 168, pp. 21-33, 2004.
- [309] Xiao H., Bruhns O.T., Meyers A.: Objective stress rates, path-dependence properties and non-integrability problems, *Acta Mechanica* 176, pp. 135-151, 2005.
- [310] Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A.: Elastoplasticity beyond small deformations, *Acta Mechanica*, 182, pp. 31-111, 2006.
- [311] Xiao H., Bruhns O. T., Meyers A.: The integrability criterion in finite elastoplasticity and its constitutive implications, *Acta Mechanica*, 188, pp. 227-244, 2007.
- [312] Xiao H., Chen L.-S.: Hencky's logarithmic strain and dual stress-strain and strain-stress relations in isotropic finite hyperelasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 40, pp. 1455-1463, 2003.

- [313] Xu Y., Chen J, Li H: Finite hyperelastic–plastic constitutive equations for atomistic simulation of dynamic ductile fracture, *International Journal of Plasticity*, 59, pp.15-29, 2014.
- [314] Yastrebov V. A.: *Numerical Methods in Contact Mechanics*, John Wiley&Sons, 2013.
- [315] Yoder P.J., Whirley R.G.: On the Numerical Implementation of Elastoplastic Models, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, pp. 283-288, 1984.
- [316] Yoshida F., Uemori T.: A model of large-strain cyclic plasticity describing the Bauschinger effect and work hardening stagnation, *International Journal of Plasticity* 18, pp.661–686, 2002.
- [317] Zbib H.M.: On the mechanics of large inelastic deformations: kinematics and constitutive modeling, *Acta Mechanica*, 96 (1-4), pp 119-138, 1993.
- [318] Zbiciak A.: Dynamika materiałów i konstrukcji o nieklasycznych charakterystykach sprężysto-dysypacyjnych, *Prace Naukowe PW, Budownictwo z. 152*, s. 1-156, OWPW, Warszawa 2010.
- [319] Zhang J.M., Rychlewski J.: Structural tensors for anisotropic solids, *Arch. Mech.*, vol. 42, no. 3, pp. 267-277, 1990.
- [320] Ziegler H., Wehrli Ch.: The Derivation of Constitutive Relations from the Free Energy and Dissipation Function, *Advances in Applied Mechanics*, vol.25, pp. 183-238, 1987.
- [321] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: *The finite element method*, McGraw-Hill, 4th edition, Volumes 1 and 2, 1994.
- [322] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: *The finite element method for solid and structural mechanics*, Elsevier, 6th edition, 2006.
- [323] Życzkowski M.: *Obciążenia złożone w teorii plastyczności*, PWN, Warszawa, 1973.

Publikacje z serii wydawniczej „Monografie Zakładu Wytrzymałości Materiałów, Teorii Sprężystości i Plastyczności” są prezentowane w zakładce „Prace naukowe” na stronie internetowej Oficyny Wydawniczej Politechniki Warszawskiej:

www.wydawnictwopw.pl

Oficina Wydawnicza Politechniki Warszawskiej prowadzi sprzedaż:

- ♦ stacjonarną – w księgarniach OWPW
– Gmach Główny Politechniki Warszawskiej przy Placu Politechniki 1
– ul. Noakowskiego 18/20
- ♦ internetową –
<http://www.wydawnictwopw.pl>
- ♦ wysyłkową – tel. 22 234-75-03
fax 22 234-70-60
e-mail: oficina@wpw.pw.edu.pl



ISBN 978-83-7814-337-6



9 788378 143376